Nilai dan Vektor Eigen

Mengingat kembali: perkalian matriks

- Diberikan matriks A_{2x2} dan vektor-vektor **u**, **v**, dan **w**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Hitunglah A**u**, A**w**, A**v.** Manakah dari hasil kali tersebut yang hasilnya adalah vektor yang sejajar dengan vektor semula

Jawab:

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{v}$$

v dan A**v** sejajar

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1.\vec{w}$$

w dan A**w** sejajar

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} \neq k\vec{u}$$

untuk semua $k \in R$

u dan A**u** **TIDAK** sejajar

Mengingat kembali: SPL homogen dan determinan

1. *A* adalah matriks *nxn* dan SPL $Ax = 0$ mempunyai penyelesaian trivial saja. Apa kesimpulanm tentang *A*?

   Jawaban:

   A mempunyai inverse. Det(A) $\neq 0$

2. *A* adalah matriks nxn dan SPL $Ax = 0$ mempunyai penyelesaian TIDAK trivial. Apa kesimpulanmu tentang *A* dan det(A)?

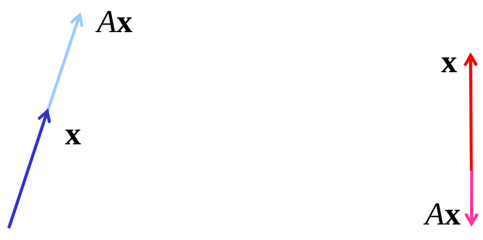
   Jawaban:

   A tidak mempunyai inverse.

   Det(A) = 0

Perkalian vektor dengan matriks

$$\boxed{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

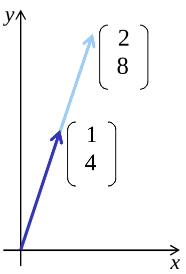


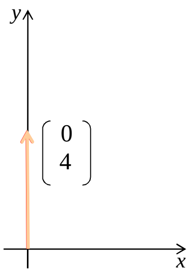
x dan *A***x** sejajar

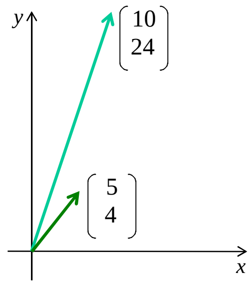
Perkalian vektor dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} \neq k\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$ $\qquad A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ $\qquad A\mathbf{w} \neq k\mathbf{w}$







Definisi: Nilai dan Vektor Eigen

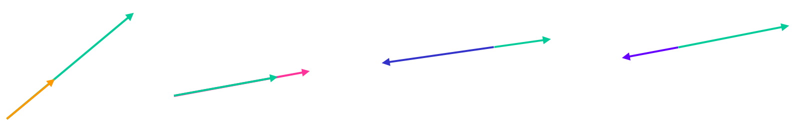
Definisi:

Diberikan matriks A_{nxn}, vektor tak nol **v** di R^n disebut vektor eigen dari A jika terdapat skalar sedemikian hingga

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ disebut nilai eigen, **v** adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ .

Syarat perlu: $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$



(1) $\lambda \geq 1$ (2) $0 \leq \lambda \leq 1$ (3) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (4) $\lambda \leq -1$

Masalah Vektor Eigen

Diberikan matriks persegi A,

$A\mathbf{x}$ sejajar $\mathbf{x}$

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Temukan semua vektor tidak nol **x** sedemikian hingga A**x** adalah kelipatan skalar **x** (A**x** sejajar dengan **x**).

atau

Temukan semua vektor tak nol **x** sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ

Masalah Nilai Eigen

Diberikan matriks persegi A.

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

x vektor tak nol

Temukan semua skalar λ sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu vektor **tak nol x.**

atau

Temukan semua vektor skalar λ sedemikian hingga persamaan

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mempunyai penyelesaian tak nol

Pernyataan-pernyataan ekuivalen

Jika A matriks persegi nxn, maka kalimat-kalimat berikut ekuivalen

1. λ nilai eigen A

2. Terdapat vektor tak nol **x** sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

3. SPL $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempuyai solusi tidak nol (non-trivial)

4. λ adalah penyelesaian persamaan det $(A - \lambda I) = 0$

Mencari nilai eigen A sama saja mencari penyelesaian persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$

Persamaan Karakteristik

Jika diuraikan, det $(A - \lambda I)$ merupakan suku banyak berderajat n dalam λ,
$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\lambda + c_0$ **suku banyak karakteristik**

Persamaan $\det((A - \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$ disebut **persamaan karakteristik**

$$A - \lambda I = A - \lambda I$$

•persamaan karakteristik

$$\det \; A - \lambda I = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

Persamaan dengan derajat n mempunyai paling banyak n penyelesaian, jadi matriks nxn paling banyak mempunyai n nilai eigen.

Contoh

Mencari semua nilai eigen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Mencari semua penyelesaian persamaan $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

Mencari penyelesaian persamaan karakteristik $(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$

Nilai eigen A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Prosedur: menentukan nilai eigen

Diberikan matriks persegi A.

Nilai-nilai eigen A dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Tentukan persamaan karakteristik $\det((A - \lambda I) = 0$
   tuliskan A dan matriks yang elemen diagonal utamanya dikurangi λ

2. (Jika diperlukan) uraikan persamaan karakteristik ke dalam persamaan sukubanyak karakteristik:
   $$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

3. Selesaikan persamaan yang diperoleh pada langkah di atas. Nilai-nilai eigen merupakan penyelesaian persamaan tersebut.

Contoh: Menentukan nilai eigen

Diberikan matriks persegi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Tentukan persamaan karakteristik det(A - λI) = 0

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) - 6 + 2(3-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0$$

2. Ubahlah persamaan karakteristik ke dalam persamaan sukubanyak karakteristik:

3. Selesaikan persamaan di atas untuk memperoleh nilai-nilai eigen

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$
$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda) = 0$$

Nilai-nilai eigen A:
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

Nilai eigen matriks diagonal

Diberikan matriks diagonal $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

•Persamaan karakteristik: $(2-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda)(1-\lambda) = 0$

•Nilai-nilai eigen 2, 6, 5, 1
(merupakan entri diagonal utama)

Nilai-nilai eigen matriks diagonal adalah elemen diagonal utamanya.

Bagaimana menentukan apakah suatu skalar merupakan nilai eigen?

- Tentukan apakah 2, 0, 4 merupakan nilai eigen *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Bentuk det(A-λI) untuk λ = 2, 0, 4. Jika det(A-λI) $\neq$ 0, maka merupakan nilai eigen, kalau = 0, maka bukan nilai eigen. Kunci: 2, 4 nilai eigen *A*, 0 bukan nilai eigen *A*.

$$\det(A-2I) = \det\begin{bmatrix} 2-2 & 2 & 0 \\ 0 & 4-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0-2 \end{bmatrix} = 0$$

2 adalah nilai eigen *A*

$$\det(A-0I) = \det\begin{bmatrix} 2-0 & 2 & 0 \\ 0 & 4-0 & 0 \\ 0 & 1 & 0-0 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$$

0 bukan nilai eigen *A*

$$\det(A-4I) = \det\begin{bmatrix} 2-4 & 2 & 0 \\ 0 & 4-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0-4 \end{bmatrix} = 0$$

4 nilai eigen *A*

Kelipatan skalar vektor eigen

- Diberikan A. Diketahui bahwa x adalah vektor eigen *A* yang bersesuaian dengan nilai eigen 2. Selidiki apakah 1/2**x**, 10**x, **5**x** juga vektor-vektor eigen *A*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{2}\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 10\vec{x} = \begin{bmatrix} -40 \\ -60 \\ 20 \end{bmatrix} \quad 5\vec{x} = \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{x}$$

$$A(10\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -40 \\ -60 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -120 \\ 40 \end{bmatrix} = 2(10\vec{x})$$

$A\mathbf{x} = 2\ \mathbf{x}$ $\qquad$ $A(10\mathbf{x}) = 2\ (10\mathbf{x})$

$$\boxed{A}\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$$

$$\boxed{A}\ (10)\ \mathrm{x} = \lambda\ (10)\ \mathrm{x}$$

Kelipatan skalar vektor eigen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{2}\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{x}$$

$$A(\tfrac{1}{2}\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(\tfrac{1}{2}\vec{x})$$

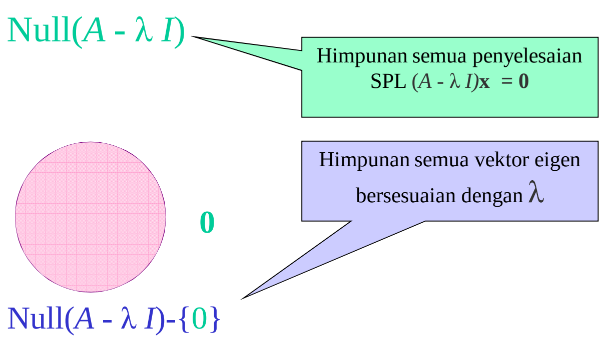
$$A\mathbf{x} = 2\ \mathbf{x} \qquad A(1/2\ \mathbf{x}) = 2\ (1/2\ \mathbf{x})$$

$$A\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x} \qquad A\ (1/2)\ \mathrm{x} = \lambda\ (1/2)\ \mathrm{x}$$

Kelipatan skalar (tak nol) dari vektor eigen adalah vektor eigen terhadap nilai eigen yang sama

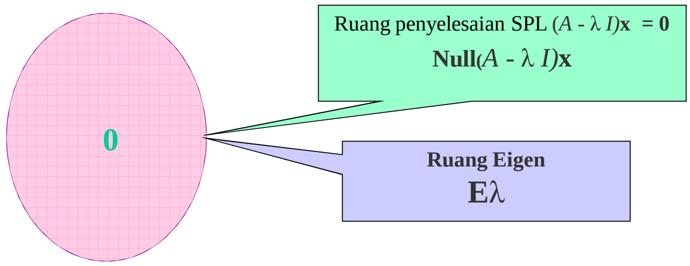
Menentukan semua vektor eigen E_λ

- Diberikan vektor matriks *A* dan salah satu nilai eigennya, misalnya λ. Tentukan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.
- Vektor-vektor eigen *A* yang bersesuaian dengan λ = 3 dapat diperoleh dengan menyelesaikan SPL (*A* - λ *I*)**x** = **0**. Vektor eigen adalah anggota Null(*A* - λ *I*)



Ruang Eigen

Ruang eigen A yang bersesuaian dengan λ terdiri atas semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ dan vektor nol



Null$(A - \lambda I) = \mathbf{E}_\lambda$

Menentukan $\mathbf{E}_\lambda$ sama dengan menentukan himpunan penyelesaian SPL $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Menentukan ruang eigen E_λ

- Diberikan vektor matriks A dan salah satu nilai eigennya, misalnya $\lambda = 3$. Tentukan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 3 \\ -2 & 1 & 1-3 \end{bmatrix}$$

SPL $(A - 3\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - 3I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 3 \\ -2 & 1 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian $\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$ **Himpunan penyelesaian** $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ a \in R \right\}$

Himpunan vektor eigen A bersesuaian dengan λ =3 : $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ a \neq 0,\ a \in R \right\}$

Nilai eigen matriks pangkat

- Nilai eigen dari A adalah 0, 2, dan 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tentukan nilai eigen untuk

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 \\ -6 & 12 & 12 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A^{13}, A^{20}$$

- Diberikan sembarang matriks A dan diketahui bahwa λ adalah nilai eigennya. Maka terdapat vektor tak nol x sedemikian hingga

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kalikan kedua ruas dengan matriks A

$A.A\mathbf{x} = A\,\lambda\mathbf{x}$

$A^2\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x})$ substitusi $A\mathbf{x}$ dengan $\lambda\mathbf{x}$

$A^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ jadi, λ^2 merupakan nilai eigen A^2

- Teorema: Jika n adalah bilangan bulat positif, λ nilai eigen matriks A, maka λ^n adalah nilai eigen A^n

Nilai eigen matriks singular

- Misalkan $\lambda = 0$ merupakan nilai eigen dari A.
  Maka 0 merupakan penyelesaian persamaan karakteristik:
  dengan menganti λ dengan 0, diperoleh c0 = 0.
  Padahal det(A- λI) = 0, dengan λ= 0, maka det(A) = c0 = 0.
  Karena det(A) = 0 maka A tidak mempunyai inverse.

- Sebaliknya, det(A) = det(A - λI) dengan mengambil λ = 0.Jadi det(A) = c0.
  Jika A tidak mempunyai inverse, maka det(A) = 0 = c0.
  Sehingga λ = 0 merupakan salah satu penyelesaian persamaan karakteristik;
  λ = 0 merupakan salah satu nilai eigen dari A.

0 adalah nilai eigen A jika dan hanya jika A tidak mempunyai inverse.

Nilai eigen matriks transpose

$\det(B) = \det(B^T)$
$(A - \lambda I)^T = (A^T - \lambda I)$

Misalkan $\lambda = 0$ merupakan nilai eigen dari A,
➔ maka $\det(A - \lambda I) = 0$
Karena matriks dan transposenya mempunyai determinan yang sama,
➔ maka $\det(A - \lambda I)^T = 0$
Karena $(A - \lambda I)^T = (A^T - \lambda I)$,
➔ maka $\det(A^T - \lambda I) = 0$
Jadi, λ adalah nilai eigen dari A^T
A dan A^T mempunyai nilai eigen yang sama

A dan A^{-1} mempuyai nilai eigen yang sama

Diagonalisasi

Definisi: Matriks persegi A dapat didiagonalkan jika terdapat matriks yang mempunyai inverse sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

Matriks diagonal

A dapat didiagonalkan

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan?

- **Teorema:**
  Jika *A* adalah matriks nxn, maka kalimat-kalimat berikut ini ekuivalen:
  1. *A* dapat didiagonalkan
  2. *A* mempunyai n vektor-vektor eigen yang bebas linier

Bukti (1) → (2)
Diberikan *A* $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Misalkan *A* dapat didiagonalkan, maka terdapat matriks P yang mempunyai inverse

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{AP=PD}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$ matriks diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan? (lanjt)

$P^{-1}AP = D$, kalikan dengan P^{-1},
$AP = PD$

$$PD=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{p_1} & \lambda_2 \vec{p_2} & \cdots & \lambda_n \vec{p_n} \end{bmatrix}$$

$$AP=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A\vec{p_1} & A\vec{p_2} & \cdots & A\vec{p_n} \end{bmatrix}$$

$AP = PD$, jadi

$$A\vec{p_1}=\lambda_1\vec{p_1} \quad A\vec{p_2}=\lambda_2\vec{p_2} \quad \cdots \quad A\vec{p_n}=\lambda_n\vec{p_n}$$

Karena P mempunyai inverse, maka kolom-kolmnya bukan kolom nol. Berdasarkan deinisi nilai eigen, maka λ_1, λ_2, λ_3, …,λ_n merupakan nilai-nilai eigen *A*, dan kolom-kolom P adalah vektor-vektor eigen *A* yang bebas linier (karena P mempunya inverse)

Bukti untuk (2) → (1) kerjakanlah sebagai latihan untuk memperdalam pemahaman.

Prosedur mendiagonalkan matriks

- Diberikan matriks A_{nxn}. Akan dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

Prosedur

1. Tentukan n vektor eigen A yang bebas linier, misalkan $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$
2. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$
3. Mariks $D = P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dengan λ_j adalah nilai eigen bersesuaian dengan $\mathbf{p}_j$ untuk $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Contoh: mendiagonalkan matriks

- Diberikan matriks A_{nxn}. Akan dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Prosedur

1. Tentukan 2 vektor eigen A yang bebas linier. Pertama kita tentukan nilai-nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ (telah dihitung sebelumnya). Tentukan vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen, dengan menyelesaiakn SPL $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$. Diperoleh

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen di atas.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Matriks $D = P^{-1}A\,P$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah λ_1, λ_2 berturut-turut

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Masalah Diagonalisasi dan masalah vektor eigen

- **Masalah vektor eigen**

Diberikan matriks A_{nxn}, apakah terdapat basis di R^n terdiri atas vektor-vektor eigen?

- **Masalah diagonalisasi**

Diberikan matriks A_{nxn} apakah terdapat matriks yang mempunyai inverse P sedemikian hingga $nP^{-1}AP$ adalah matriks diagonal?

Teorema:

A_{nxn} dapat didiagonalkan jika dan hanya jika terdapat n vektor eigen yang bebas linier.

Padahal, setiap n vektor yang saling bebas linier di R^n merupakan basis R^n.

Kesimpulan: **masalah vektor eigen sama dengan masalah diagonalisasi**