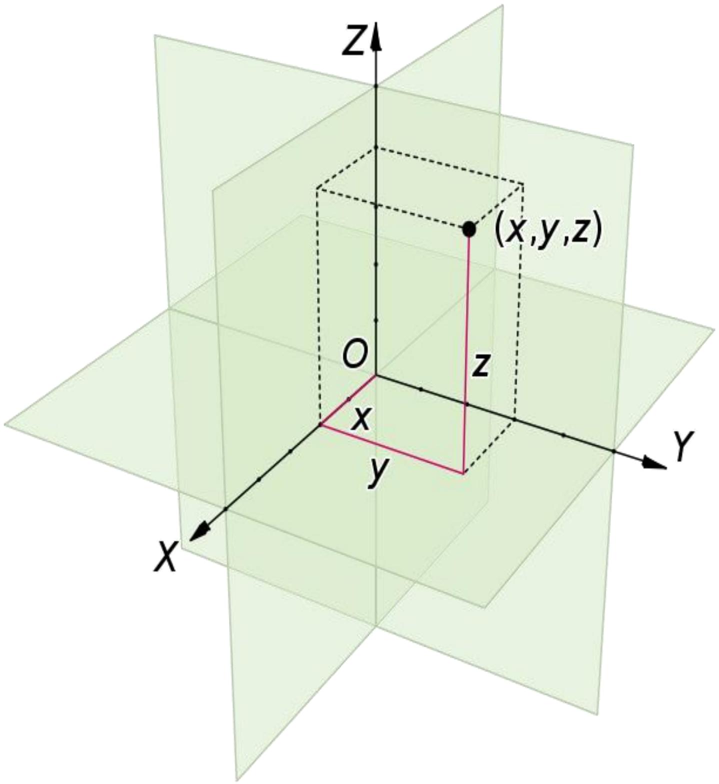

Materi 1

Sistem Persamaan Linier dan Matriks (lanjutan)

Start

Outline Materi

- Metode Penyelesaian SPL dengan Matriks (Lanjutan)
  - Invers Matriks (A^{-1})
  - Metode Penentuan A^{-1}

INVERS MATRIKS

- Definisi :

  Jika A dan B adalah sebarang matriks bujur sangkar sedemikian sehingga AB=BA=I. Maka B merupakan invers dari A atau A^{-1} dan sebaliknya. Matriks yang mempunyai invers disebut *invertible* atau non singular.

- Untuk mendapatkan A^{-1}, dapat dilakukan dengan cara :

  1. Metode Matriks Adjoint / Determinan
  2. Metode Operasi Baris Elementer (OBE)

     atau Operasi Kolom Elementer (OKE)

Mencari Invers dengan Matriks Adjoint

Ingat kembali sifat matriks adjoint, yaitu :

$$A \,.\, \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \,.\, A = |A|\ I$$

Jika $|A| \neq 0$, maka :

$$A \,.\, \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{adj(A)}{|A|} \,.\, A = I$$

Menurut definisi matriks invers :

$$\boxed{A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I}$$

Ini berarti bahwa :

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} \quad \text{dengan } |A| \neq 0$$

Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solusi :

$C_{11} = M_{11} = d$

$C_{21} = - M_{21} = - b$

$C_{12} = - M_{12} = - c$

$C_{22} = M_{22} = a$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$| A | = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Solusi :

$C_{11} = M_{11} = -5$ $\quad C_{21} = -M_{21} = 4$ $\quad C_{31} = M_{31} = -4$

$C_{12} = -M_{12} = 1$ $\quad C_{22} = M_{22} = -2$ $\quad C_{32} = -M_{32} = 0$

$C_{13} = M_{13} = 1$ $\quad C_{23} = -M_{23} = 0$ $\quad C_{33} = M_{33} = 2$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(-5) + (4)(1) + (4)(1) = -2$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mencari invers dengan OBE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OBE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

$$P\,A = I$$

dengan P hasil penggandaan matriks elementer (baris).

Selanjutnya,

$$P\,A = I$$
$$P^{-1}\,P\,A = P^{-1}\,I$$
$$I\,A = P^{-1}$$
$$A = P^{-1}$$

Ini berarti $A^{-1} = P$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (baris) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OBE :

$$(A \mid I) \quad \sim \quad (I \mid A^{-1})$$

Carilah invers dari B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OBE !

Solusi :

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{H_{31(2)}}{\overset{H_{21(1)}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{H_{3(-1/2)}}{\overset{H_{1(-1)}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{H_{23(1)}}{\overset{H_{13(-3)}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{H_{12(-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$= (I \mid B^{-1})$

Jadi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Mencari invers dengan OKE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OKE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

$$A\ Q = I$$

dengan Q hasil penggandaan matriks elementer (kolom).

Selanjutnya,

$$A\ Q = I$$
$$A\ Q\ Q^{-1} = I\ Q^{-1}$$
$$A\ I = Q^{-1}$$
$$A = Q^{-1}$$

Ini berarti $A^{-1} = Q$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (kolom) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OKE :

$$\left(\frac{A}{I}\right) \sim \left(\frac{I}{A^{-1}}\right)$$

Carilah invers dari B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OKE !

Solusi :

$$\left(\frac{B}{I}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{K_{31(-2)}}{\overset{K_{21(-2)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_{12(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_{13(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 5 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_{1(1/2)}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_{3(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{B^{-1}}\right)$$

Jadi B^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat Matriks Invers

(1) M**atriks invers (jika ada) adalah tunggal (*uniqe*)**

Andaikan B dan C adalah invers dari matriks A, maka berlaku :
AB = BA = I, dan juga
AC = CA = I
Tetapi untuk : BAC = B(AC) = BI = B ....(*)
BAC = (BA)C = IC = C ....(**)
Dari (*) dan (**) haruslah B = C.

(2) **Invers dari *matriks invers* adalah matriks itu sendiri**.

Andaikan matriks $C = A^{-1}$, berarti berlaku :
AC = CA = I (*)
Tetapi juga berlaku $C\,C^{-1} = C^{-1}\,C = I$ (**)
Dari (*) dan (**) berarti :
$C^{-1} = A$
$(A^{-1})^{-1} = A$.

Sifat-sifat Matriks Invers

(3) **Matriks invers bersifat nonsingular (determinannya tidak nol)**

$\det(A\,A^{-1}) = \det(A)\ \det(A^{-1})$
$\det(I) = \det(A)\ \det(A^{-1})$
$1 = \det(A)\ \det(A^{-1})$; karena $\det(A) \neq 0$, maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

ini berarti bahwa $\det(A^{-1})$ adalah tidak nol dan kebalikan dari det (A).

(4) **Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi berdimensi *n*, dan berturut-turut A^{-1} dan B^{-1} adalah invers dari A dan B, maka berlaku hubungan : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$**

$(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I \qquad (*)$
di sisi lain :
$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$
$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,I\,B = B^{-1}B = I \qquad (**)$

Menurut sifat (1) di atas matriks invers bersifat uniqe (tunggal), karena itu dari (*) dan (**) dapatlah disimpulkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Sifat-sifat Matriks Invers

(5) **Jika matriks persegi A berdimensi *n* adalah non singular, maka berlaku $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.**

Menurut sifat determinan : $|A^T| = |A| \neq 0$, oleh sebab itu $(A^T)^{-1}$ ada, dan haruslah :

$(A^T)^{-1} A^T = A^T (A^T)^{-1} = I$ (*)

Di sisi lain menurut sifat transpose matriks :

$(A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

$I^T = (A^{-1})^T A^T$

$(A^{-1})^T A^T = I$, hubungan ini berarti bahwa $(A^{-1})^T$ adalah juga invers dari A^T.

Padahal invers matriks bersifat tunggal, oleh karena itu memperhatikan (*), haruslah :

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.