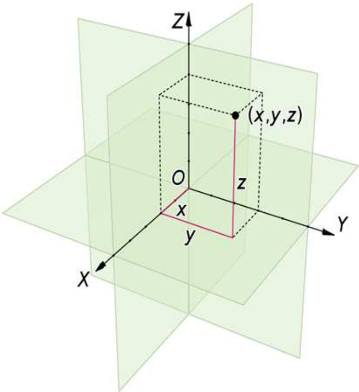

Ruang Vektor Umum

Start

Ruang Vektor Umum

Misalkan $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $k, l \in Riil$

V dinamakan **ruang vektor** jika terpenuhi aksioma :

1. V tertutup terhadap operasi penjumlahan
   Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
4. Terdapat $\bar{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\bar{u} \in V$
   berlaku $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$
5. Untuk setiap $\bar{u} \in V$ terdapat $(-\bar{u})$ sehingga
   $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

3

6. V tertutup thd operasi perkalian dengan skalar.

Untuk setiap $\bar{u} \in V$ dan $k \in$ *Riil* maka $k\bar{u} \in V$

7. $k(\bar{u}+\bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

8. $(k+l)\,\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$

9. $k(l\,\bar{u}) = l(k\,\bar{u}) = (kl)\,\bar{u}$

10. $1.\bar{u} = \bar{u}$

4

Ruang Euclides orde *n*

Operasi-Operasi pada ruang vektor Euclides:

- Penjumlahan

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

- Perkalian dengan skalar Riil sebarang (*k*)

$$k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

- Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

- Panjang vektor didefinisikan oleh :

$$\| \bar{u} \| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}}$$

- Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{u} - \bar{v} \| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

5

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (1,\ 1,\ 2,\ 3)$ dan $\bar{v} = (2,\ 2,\ 1,\ 1)$

Tentukan panjang vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Jarak kedua vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{7}$$

<u>SubRuang (*subspace*)</u>

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V

W dinamakan **subruang** (*subspace*) V

jika W juga merupakan ruang vektor

yang tertutup terhadap *operasi penjumlahan* dan *perkalian dengan skalar*.

Syarat W disebut subruang dari V adalah :

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\bar{u} \in W$ maka $k\bar{u} \in W$
4. Jika $\bar{u}, \bar{v} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $\bar{u} + \bar{v} \in W$

Contoh :

Tunjukkan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

1. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\ \}$
2. Jelas bahwa $W \subseteq M_{2 \times 2}$
3. Ambil sembarang matriks $A, B \in W$

   Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks $A \in W$ dan $k \in$ Riil

   maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan Subruang dari $M_{2 \times 2}$

Contoh :

Periksa apakah himpunan *D* yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinan-nya nol, merupakan subruang dari ruang vektor $M_{2 \times 2}$

Jawab :

Ambil sembarang matriks A, B $\in$ W

Pilih $a \neq b$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Karena $a \neq$ b

Maka $det\,(A + B)$ = $a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi *D* bukan merupakan subruang
karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Kombinasi Linear

Sebuah vektor $\bar{u}$ dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor
$\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \cdots,\bar{v}_n$
jika vektor – vektor tersebut
dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ \dots\ + k_n\bar{v}_n$$

dimana $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n$ adalah skalar Riil.

Contoh

Misal $\bar{u}$ = (2, 4, 0), dan $\bar{v}$ = (1, –1, 3)

adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor–vektor di atas

a. $\bar{a}$ = (4, 2, 6)

b. $\bar{b}$ = (1, 5, 6)

c. $\bar{c}$ = (0, 0, 0)

Jawab :

a. Tulis $k_1\overline{u} + k_2\overline{v} = \overline{a}$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc:c}2 & 1 & 4\\4 & -1 & 2\\0 & 3 & 6\end{array}\right)$$

dengan OBE (*Operasi Baris Elementer*), diperoleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c}2 & 1 & 4\\4 & -1 & 2\\0 & 3 & 6\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc:c}1 & \frac{1}{2} & 2\\1 & -3 & -6\\0 & 3 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c}1 & \frac{1}{2} & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$k_1 = 1; k_2 = 2$$

$\overline{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah ***tidak konsisten***
(tidak mempunyai solusi).
Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi
➔ **b** *tidak* dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **u** dan **v**

c. Dengan memilih k_1 = 0 dan k_2 = 0,

maka dapat ditulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear dari vektor apapun.

Membangun dan Bebas Linear

Himpunan vektor

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$$

dikatakan **membangun** suatu ruang vektor *V* **jika** setiap vektor pada *V* selalu dapat dinyatakan sebagai ***kombinasi linear*** dari vektor–vektor di *S*.

Contoh :

Tentukan apakah

$\bar{v}_1$ = (1, 1, 2),

$\bar{v}_2$ = (1, 0, 1), dan

$\bar{v}_3$ = (2, 1, 3)

membangun V???

Jawab :

Ambil sembarang vektor di R^2

Misalkan:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tulis :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

06/06/2015 7:35 20

Syarat agar dapat dikatakan ***kombinasi linear***, maka SPL tersebut harus mempunyai solusi (***konsisten***)

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u1 \\ 0 & -1 & -1 & u2 - u1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{u3 - u1 - u2} \end{array}\right]$$

Agar SPL itu konsisten **haruslah** $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang (unsur–unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor – vektor tersebut **tidak membangun** R^3

06/06/2015 7:35 21

Bebas Linear

Misalkan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$

adalah himpunan vektor di ruang vektor V

S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*)
JIKA SPL homogen :

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_1 + \ldots + k_n\bar{u}_n = \bar{0}$$

hanya mempunyai ***satu solusi*** (***tunggal***), yakni

$$k_1 = 0,\; k_2 = 0, \ldots,\; k_n = 0$$

Jika solusinya ***tidak tunggal***
maka S kita namakan himpunan ***tak bebas linear***
(**Bergantung linear / *linearly dependent***)

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (-1,\, 3,\, 2)$ dan $\bar{a} = (1,\, 1,\, -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti $\bar{u}$ dan $\bar{a}$ adalah saling bebas linear.

Contoh :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ adalah vektor-vektor yang **bergantung linear**

Basis dan Dimensi

Jika V adalah sembarang ruang vektor

dan $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots , \bar{u}_n \}$ merupakan

himpunan berhingga dari vektor–vektor di V,

maka ***S* dinamakan basis bagi *V*** jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S **membangun/merentang** (*span*) V → (S *spans* V)
- S bebas linear

Contoh :
Tunjukkan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur
pada kedua matriks, diperoleh SPL :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks koefisiennya (MK) = 48

- *det* (MK) ≠ 0 ➔ SPL memiliki solusi
  untuk setiap a,b,c,d

  Jadi, M membangun $M_{2 \times 2}$
- Ketika *a = 0, b = 0, c = 0, d = 0,*

  det (MK) ≠ 0 ➔ SPL homogen punya solusi tunggal.

  Jadi, M bebas linear.

Karena M bebas linear dan membangun $M_{2\times 2}$
maka M merupakan basis bagi $M_{2\times 2}$.
Ingat…
Basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal.

Contoh :

Untuk ruang vektor dari $M_{2\times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

juga merupakan basisnya.

Basis Ruang Baris & Kolom

Misalkan matriks :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor baris

Vektor kolom

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE matriks A mempunyai **basis ruang kolom** yaitu :

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

basis ruang baris diperoleh dengan cara,
Mentranspose-kan terlebih dahulu matriks *A,*
lakukan OBE pada A^t, sehingga diperoleh :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 2 & 2\\-1 & 3 & 2\\1 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{2}\\0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama berseseuaian dengan matriks asal (*A*).
Ini berarti,
matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris** :

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Dimensi basis ruang baris = ruang kolom dinamakan **rank**.
Jadi rank dari matriks *A* adalah 2.