DISTRIBUSI PROBABILITAS

Diskrit dan Kontinu.

Kedisktritan suatu sistem dapat dilihat dari perubahan keadaan sistem dari waktu ke waktu. Jika perubahan keadaan yang terjadi hanya pada waktu tertentu, bukan pada setiap titik waktu, maka dikatakan sistem diskrit. Dalam hal lain dikatakan sistem kontinu.

Dalam membuat suatu simulasi, harus sesuai dengan perilaku sistem. Dari sistem diskrit, akan dijumpai variabel diskrit, untuk sistem kontinu, akan dijumpai variabel kontinu. Contoh mendapatkan variabel diskrit dengan menghitung jumlah produk cacat, jumlah sumber daya manusia, jumlah mesin yang dibutuhkan. Contoh mendapatkan variabel kontinu dengan menggunakan alat ukur, berat kemasan, tekanan udara, waktu antar kedatangan, waktu proses.

Dari variabel diatas didapatlah data pengamatan, tidak hanya sifatnya yang harus kita ketahui, tetapi pola penyebarannya juga harus kita ketahui, maka kita pelajari mengenai pola distribusinya. Agar simulasi yang kita lakukan nantinya sesuai dengan keadaan yang sebenarnya.

Pendugaan Pola Distribusi

Kita perlu mengetahui pola distribusi dari data pengamatan, sehingga pada saat melakukan simulasi nantinya, pola distribusi variabel acak yang diambil akan sesuai dengan pola distribusi data yang sebenarnya.

Ada beberapa cara yang bisa ditempuh :

1. Ringkasan Statistik
   a. Beberapa distribusi dapat dikarakteristikan paling tidak oleh ringkasan statistik datanya. Dari ringkasan ini dapat diketahui keluarga distribusinya. Nilai-nilai pemusatan merupakan besaran statistik yang

cukup penting guna menduga keluarga distribusi. Mean ($\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$) dan median ($med = batasbawahkelasmed + lebarkelas * (\frac{\sum fi/2 - \sum fi_{sebklsmed}}{f_{kelasmed}})$) misalnya, pada distribusi kontinu jika nilainya sama, maka dapat dipastikan bahwa kurva distribusi berbentuk simetris.

b. Koefisien varian ($\mathbf{cv} = \mathbf{s}/\mathbf{\bar{x}}$) juga mempunyai peranan yang penting dalam menduga keluarga distribusi. Untuk nilai koefisien varian 1(satu) maka dapat diduga data berdistribusi eksponensial, jika lebih besar atau lebih kecil dari satu maka dugaan mengarah kepada ditribusi Gamma.

c. Untuk distribusi diskrit, maka dari nilai rasio lexis ($\tau = \mathbf{s}^2/\mathbf{\bar{x}}$) dapat diduga distribusinya. Jika nilai rasio lexis = 1 dugaan berdistribusi poisson, Jika nilai rasio lexis < 1 dugaan berdistribusi Binomial dan Jika nilai rasio lexis > 1 dugaan berdistribusi binomial negatif.

d. Kelandaian distribusi (Skewness)

   Rumus Skewness $= \tau = \mathbf{3*(\mathit{mean} - \mathit{median})}/\mathbf{\mathit{s}}$. Untuk distribusi simetris, skewness bernilai 0(nol), jika, skewness > 0 distribusi akan menjulur kekanan dan sebaliknya ke kiri. Misal nilai skewness = 2 berarti data berdistribusi eksponensial.

2. Histogram dan Grafik Garis

   Dari bentuk histogram data, maka memcerminkan pola distribusinya.

Sebelum kita melakukan pendugaan pola distribusi dari data yang kita amati, perlu kita pelajari terlebih dahulu fungsi Distribusi

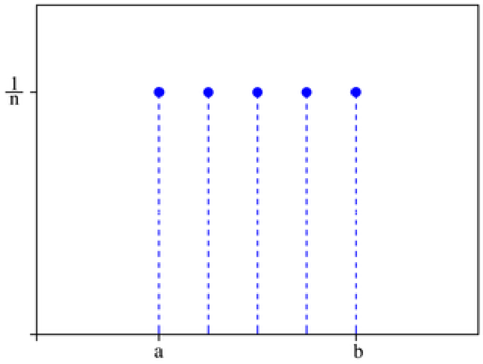
1. Distribusi Diskrit

Distribusi prob uniform diskrit

Ciri-ciri : Setiap nilai variabel acak mempunyai probabilitas terjadi yang sama.

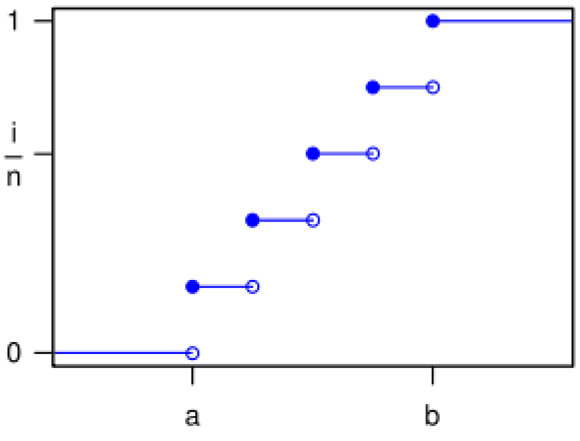
Discrete uniform

Probability mass function



n=5 where n=b-a+1

Cumulative distribution function



Parameters	$a \in (\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ $b \in (\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ $n = b - a + 1$
Support	$k \in \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$
Probability mass function (pmf)	$\frac{1}{n}$ for $a \le k \le b$ 0 otherwise

Cumulative distribution function (cdf)	$\begin{array}{cc} 0 & \text{for } k < a \\ \frac{k-a+1}{n} & \text{for } a \le k \le b \\ 1 & \text{for } k > b \end{array}$
Mean	$\frac{a+b}{2}$
Median	$\frac{a+b}{2}$
Mode	N/A
Variance	$\frac{n^2-1}{12}$
Skewness	0
Excess kurtosis	$\frac{9(n^2+1)}{5(n^2-1)}$
Entropy	$\ln(n)$
Moment-generating function (mgf)	$\frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{n(1-e^t)}$
Characteristic function	$\frac{e^{iat}-e^{i(b+1)t}}{n(1-e^{it})}$

Contoh :

Pada sebuah dadu, peluang muncul untuk setiap mata dadu adalah 1/6,

p(x) = 1/6 untuk x = 1,2,3,4,5,6

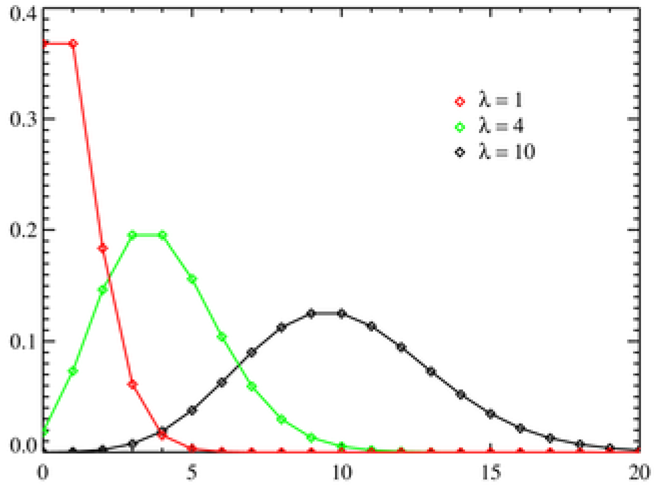
Distribusi Poisson

Ciri-ciri :

Merupakan limit dari distribusi Binomial dengan banyaknya percobaan n relatif besar

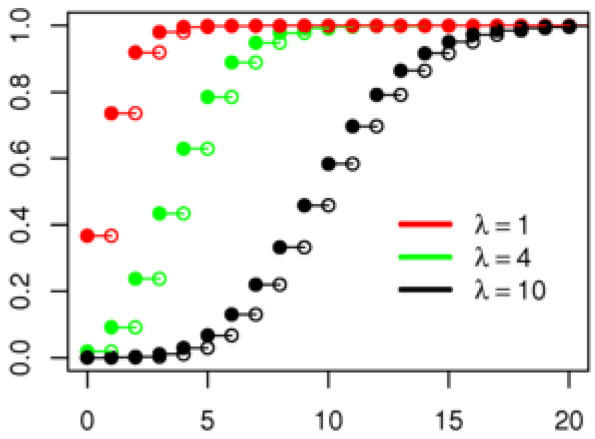
Poisson

Probability mass function



The horizontal axis is the index *k*. The function is defined only at integer values of *k*. The connecting lines are only guides for the eye and do not indicate continuity.

Cumulative distribution function



The horizontal axis is the index *k*.

Parameters	$\lambda \in (0, \infty)$
Support	$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
Probability mass function (pmf)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
Cumulative distribution function (cdf)	$\frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor !}$ for $k \geq 0$ (where $\Gamma(x,y)$ is the Incomplete gamma function)
Mean	λ
Median	usually about $\lfloor \lambda + 1/3 - 0.02/\lambda \rfloor$

Mode	$\lfloor\lambda\rfloor$ (and $\lambda - 1$ if λ is an integer)
Variance	λ
Skewness	$\lambda^{-1/2}$
Excess kurtosis	λ^{-1}
Entropy	$\lambda[1-\ln(\lambda)]+e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$
Moment-generating function (mgf)	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Characteristic function	$\exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Contoh :

Polisi sektor daerah A mencatat rata-rata 5 orang tertangkap dengan kasus Narkotika setiap bulan. Hitunglah probabilitas bahwa pada bulan tertentu antara 5 sampai 9 orang !

λ = 5

x	p
0	0.0067
1	0.0337
2	0.0842
3	0.1404
4	0.1755
5	0.1755
6	0.1462
7	0.1044
8	0.0653
9	0.0363
Probabilitas	0.9682

x	p
0	0.0067
1	0.0337
2	0.0842
3	0.1404
4	0.1755
Probabilitas	0.4405

$P(5 \leq X \leq 9)$ 0.5277

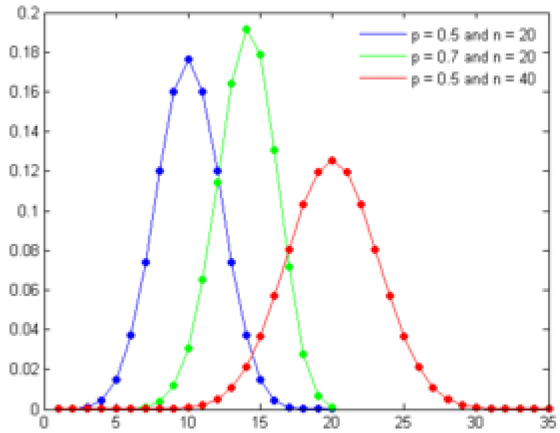
Distribusi Binomial

Ciri-ciri :

- Setiap percobaan hasilnya dapat dibedakan dalam 2 macam kejadian: berhasil (probabilitas dinyatakan dengan notasi p) atau tidak berhasil (probabilitas dinyatakan dengan notasi q = 1 – p)
- Masing-masing percobaan merupakan peristiwa yang bersifat bebas yaitu peristiwa yang satu tidak mempengaruhi peristiwa yang lain.

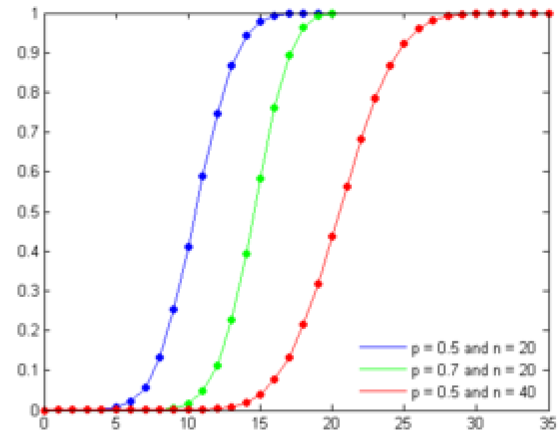
Binomial

Probability mass function



The lines connecting the dots are added for clarity

Cumulative distribution function



Colors match the image above

Parameters	$n \geq 0$ number of trials (integer) $0 \leq p \leq 1$ success probability (real)
Support	$k \in \{0, \dots, n\}$
Probability mass function (pmf)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Cumulative distribution function (cdf)	$I_{1-p}(n - \lfloor k \rfloor, 1 + \lfloor k \rfloor)$

Mean	np
Median	one of $\{\lfloor np\rfloor - 1, \lfloor np\rfloor, \lfloor np\rfloor + 1\}$
Mode	$\lfloor (n+1)\,p\rfloor$
Variance	$np(1-p)$
Skewness	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$
Excess kurtosis	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
Entropy	$\frac{1}{2}\ln\left(2\pi nep(1-p)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$
Moment-generating function (mgf)	$(1-p+pe^t)^n$
Characteristic function	$(1-p+pe^{it})^n$

Contoh :

Menurut penelitian, probabilitas seseorang untuk sembuh dari penyakit anthrax yang diberi obat tertentu sebesar 60 %. Jika diambil 10 orang yang terjangkit secara acak, hitunglah probabilitas tidak lebih dari 2 orang sembuh.

Ditanya P(X ≤ 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X= 2)

n =	10
p =	0.6
q =	0.4

x	kombinasi	P(X=x)
0	1.0000	0.0001049
1	10.0000	0.0015729
2	45.0000	0.0106168
Probabilitas		0.0122946

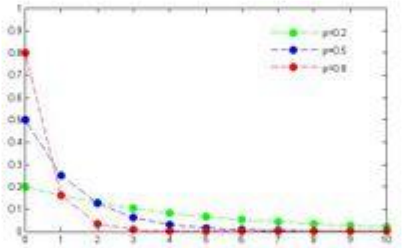
Distribusi Geometri

Ciri-ciri :

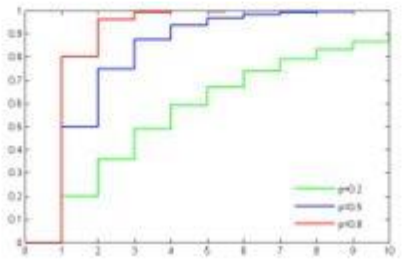
- Percobaan bebas dilakukan berulang, dapat menghasilkan keberhasilan dengan probabilitas p dan kegagalan dengan probabilitas q = 1 – p.

Geometric

Probability mass function



Cumulative distribution function



Parameters	$0 < p \leq 1$ success probability (real)
Support	$k \in \{1, 2, 3, \dots\}$
Probability mass function (pmf)	$(1-p)^{k-1}\,p$
Cumulative distribution function (cdf)	$1-(1-p)^k$
Mean	$\frac{1}{p}$
Median	$\left\lceil \frac{-\log(2)}{\log(1-p)} \right\rceil$ (not unique if $-\log(2)/\log(1-p)$ is an integer)
Mode	1
Variance	$\frac{1-p}{p^2}$
Skewness	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$

Excess kurtosis	$6+\frac{p^2}{1-p}$
Entropy	$-\frac{1-p}{p}\ln(1-p)-\ln p$
Moment-generating function (mgf)	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Characteristic function	$\frac{pe^{it}}{1-q\,e^{it}}$ (where $q = 1 - p$)

Contoh :

Probabilitas wanita yang tidak menyetujui poligami 80 %. Tentukan probabilitas seorang sosiolog memerlukan 3 orang wanita sampai diperoleh wanita yang tidak setuju poligami.

n =	10
p =	0.8
q =	0.2

x	p	q^(x-1)	P
3	0.8000	0.0400	0.0320
Probabilitas			0.0320

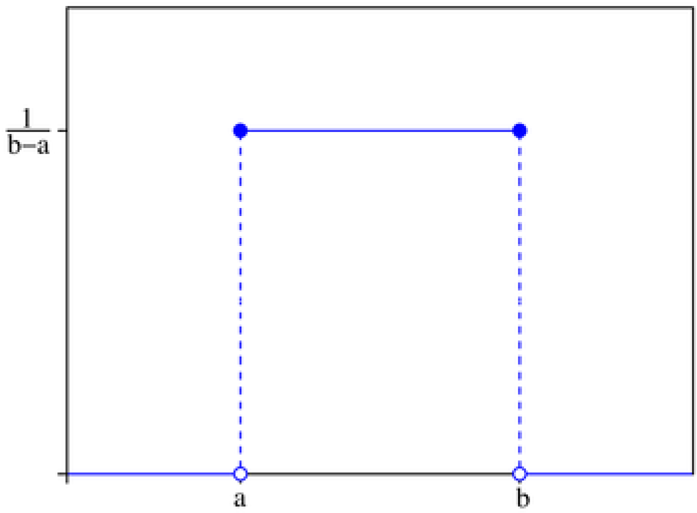
2. Distribusi Kontinu

Distribusi Kontinu memiliki sifat kontinu, data yang diamati berjalan secara berkesinambungan dan tidak terputus.

<u>Distr probabilitas uniform kontinu</u>

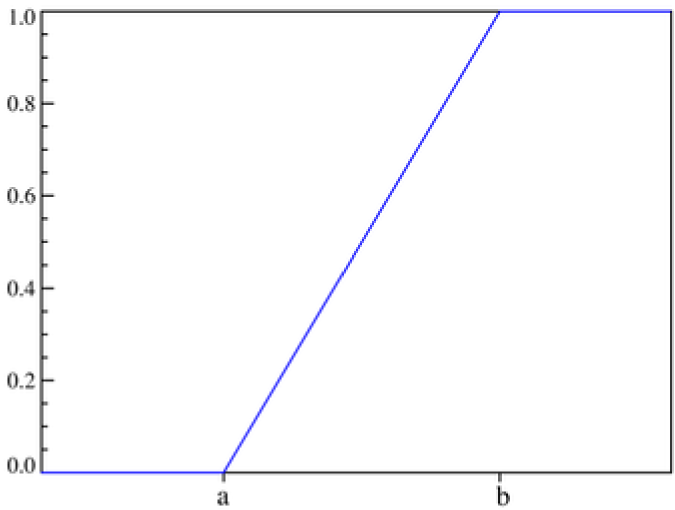
Uniform

Probability density function



Using maximum convention

Cumulative distribution function



Parameters $a, b \in (-\infty, \infty)$

Support	$a \le x \le b$
Probability density function (pdf)	$\frac{1}{b-a}$ for $a \le x \le b$ 0 for $x < a$ or $x > b$
Cumulative distribution function (cdf)	0 for $x < a$ $\frac{x-a}{b-a}$ for $a \le x < b$ 1 for $x \ge b$
Mean	$\frac{a+b}{2}$
Median	$\frac{a+b}{2}$
Mode	any value in $[a, b]$
Variance	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Skewness	0
Excess kurtosis	$-\frac{6}{5}$
Entropy	$\ln(b-a)$
Moment-generating function (mgf)	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Characteristic function	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$

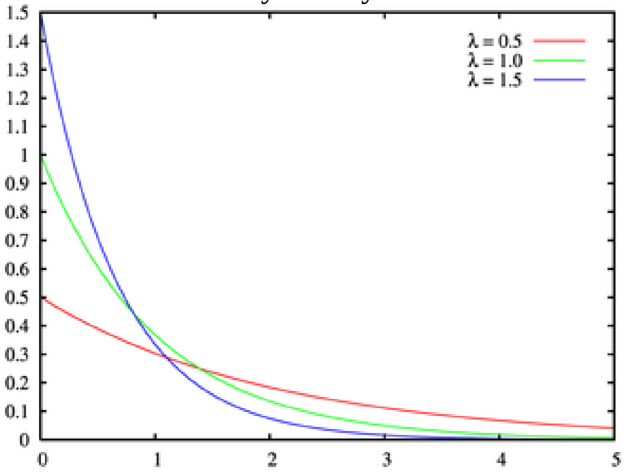
Contoh

Pada suatu sentra telpon ternyata distribusi pelayanan telponnya berdistribusi uniform kontinu dengan minimal waktu 3 menit dan maksimal 5 menit.

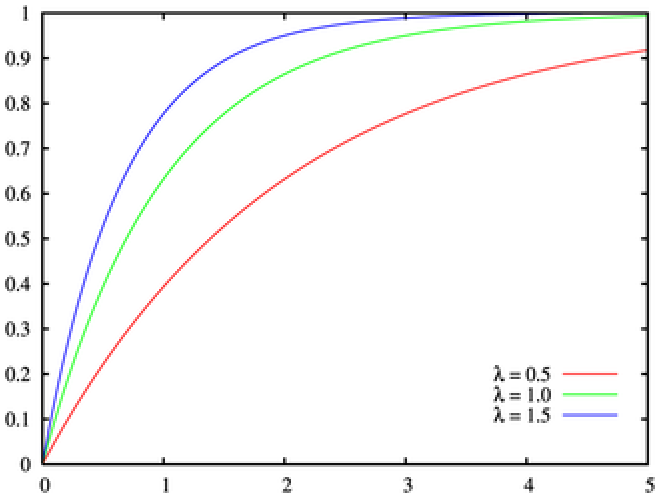
Distribusi Eksponensial

Exponential

Probability density function



Cumulative distribution function



Parameters	$\lambda > 0$ rate or inverse scale (real)
Support	$[0, \infty)$
Probability density function (pdf)	$\lambda e^{-\lambda x}$
Cumulative distribution function (cdf)	$1 - e^{-\lambda x}$
Mean	λ^{-1}
Median	$\ln(2)/\lambda$
Mode	0
Variance	λ^{-2}

Skewness	2
Excess kurtosis	6
Entropy	$1 - \ln(\lambda)$
Moment-generating function (mgf)	$\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$
Characteristic function	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

Contoh :

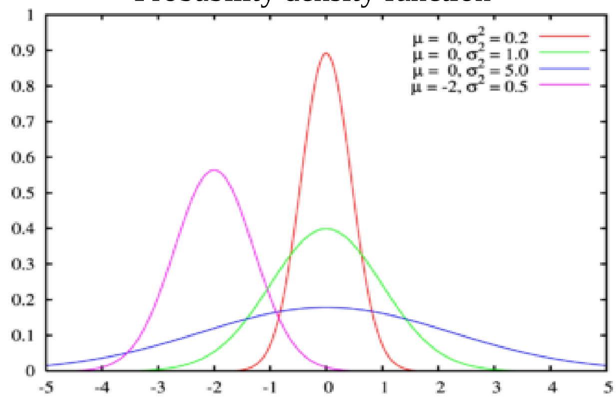
Pada suatu sentra telpon ternyata distribusi penerimaan telponnya berdistribusi eksponensial dengan mean = 0,1 menit.

Distribusi Normal

Distribusi Normal merupakan model yang baik untuk mendekati frekuensi dari fenomena alam dan sosial jika sampelnya besar.

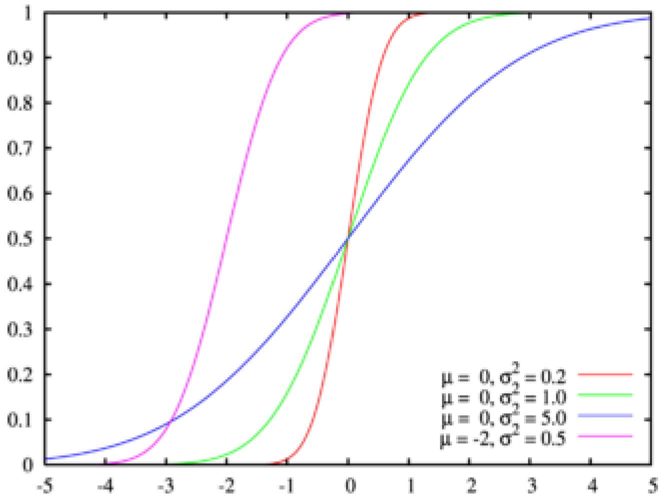
Normal

Probability density function



The green line is the standard normal distribution

Cumulative distribution function



Colors match the image above

Parameters	μ location (real) $\sigma^2 > 0$ squared scale (real)
Support	$x \in \mathbb{R}$
Probability density function (pdf)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Cumulative distribution function (cdf)	$\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$
Mean	μ
Median	μ
Mode	μ
Variance	σ^2
Skewness	0
Excess kurtosis	0
Entropy	$\ln\left(\sigma\sqrt{2\,\pi\,e}\right)$
Moment-generating function (mgf)	$M_X(t) = \exp\left(\mu\,t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Characteristic function	$\chi_X(t) = \exp\left(\mu\,i\,t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{s}$$

Dengan X : Nilai tengah dari kelas distribusi

$\bar{x}$: nilai rata rata

s : simpangan baku

Contoh :

Curah hujan yang tercatat di stasiun Pengamatan Cuaca Tanjung Selor Kalimantan Timur selama 10 tahun terakhir rata-rata mencapai 2800 mm/th dengan simpangan baku 75 mm/th. Bila curah hujan mengikuti distribusi normal, hitunglah probabilitas curah hujan kurang dari 2675 mm/th atau lebih dari 2900 mm/th !

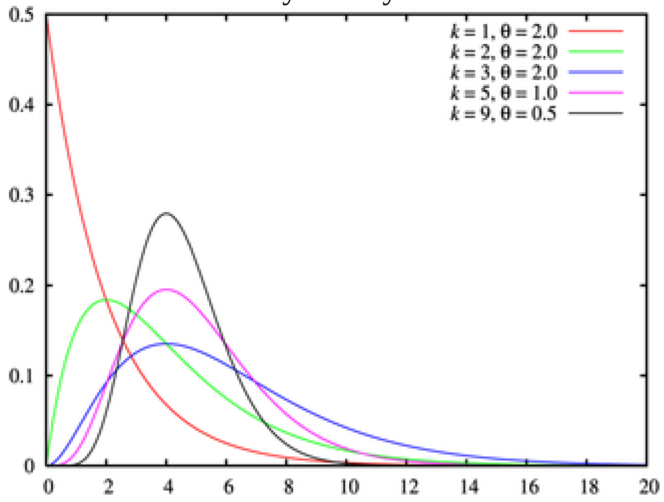
x = 2800
s = 75

X	Z	F(X)
2675	-1.67	0.0478
2900	1.33	0.0912
Probabilitas		0.1390

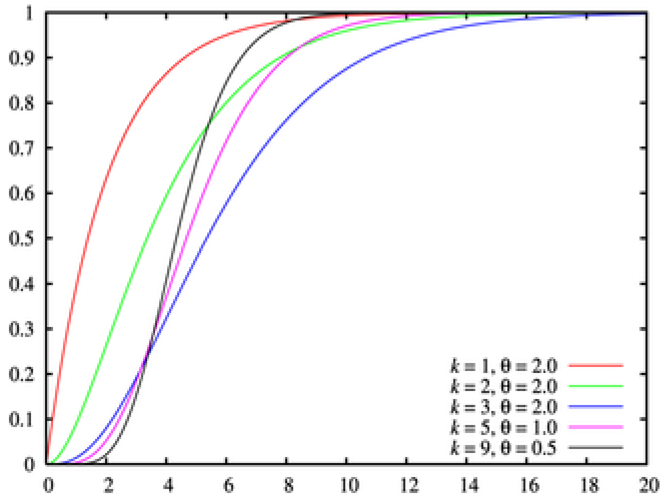
Distribusi Gamma

Gamma

Probability density function



Cumulative distribution function



Parameters	$k > 0$ shape (real) $\theta > 0$ scale (real)
Support	$x \in [0; \infty)$
Probability density function (pdf)	$x^{k-1} \frac{\exp(-x/\theta)}{\Gamma(k)\,\theta^k}$
Cumulative distribution function (cdf)	$\frac{\gamma(k, x/\theta)}{\Gamma(k)}$
Mean	$k\theta$
Median	no simple closed form

Mode	$(k-1)\theta$ for $k \geq 1$
Variance	$k\theta^2$
Skewness	$\frac{2}{\sqrt{k}}$
Excess **kurtosis**	$\frac{6}{k}$
Entropy	$k + \ln\theta + \ln\Gamma(k)$ $+(1-k)\psi(k)$
Moment-generating function (mgf)	$(1-\theta\,t)^{-k}$ for $t < 1/\theta$
Characteristic function	$(1-\theta\,i\,t)^{-k}$

Contoh Pendugaan pola distribusi :

Distribusi frekuensi dari permintaan distributor PT. A terhadap produk minuman B

No	batas		frekuensi (f)
	bawah	atas	
1	375	379	10
2	380	384	6
3	385	389	7
4	390	394	6
5	395	399	6
6	400	404	6
7	405	409	7

No	batas		frekuensi	nilai	fi.Xi	(Xi - x)	(Xi - x)^2	fi(Xi - x)^2
	bawah	atas	(f)	tengah (X)				
1	375	379	10	377	3770	-13.96	194.8	1,948.4
2	380	384	6	382	2292	-8.96	80.3	481.5
3	385	389	7	387	2709	-3.96	15.7	109.7
4	390	394	6	392	2352	1.04	1.1	6.5
5	395	399	6	397	2382	6.04	36.5	219.0
6	400	404	6	402	2412	11.04	121.9	731.5
7	405	409	7	407	2849	16.04	257.3	1,801.3
	JUMLAH		48		18766			5,297.9

Mean	390.9583
Median	390.3333
S	10.5059
CV	0.0269
skewness	0.1785

Dari hasil diatas nilai rata-rata hampir sama dengan median, maka diduga data berdistribusi normal.

SOAL :

Diberikan distribusi frekuensi Data pengamatan Produk kecap ABC pada tahun 2002

No	batas		frekuensi (f)
	bawah	atas	
1	141	144	13
2	145	148	9
3	149	152	10
4	153	156	8
5	157	160	6
6	161	164	5
7	165	168	4

Bagaimana dengan dugaan pola distribusinya?