PENYELESAIAN SISTEM LINIER

I. PENDAHULUAN

1.1. Topik-topik Yang Dibahas :

1. Substitusi mundur (*back substitution*)
2. Reduksi ganjil-genap (*odd-even reduction*) atau reduksi siklis (*cyclic reduction*)

1.2. Metoda Pembahasan

1. Algoritma sequensial
2. Potensi paralelisasi
3. Algoritma paralel
4. *Speedup*

1.3. Terminologi :

i. Bentuk umum sistem linier :

A x = b, A matriks $n \times n$, x, b vektor $n \times 1$

ii. Elemen matriks A baris ke-i kolom ke-j : a_{ij} atau $a[i, j]$

Elemen vektor **x** baris ke- i : x_i atau $x[i]$

Elemen vektor **b** baris ke- i : b_i atau $b[i]$

iii. Matriks **A** adalah segitiga atas (*upper triangular*) jika : $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$

iv. Matriks **A** adalah segitiga bawah (*lower triangular*) jika : $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$

v. Matriks **A** adalah tridiagonal jika dan hanya jika :

$a_{ij} = 0 \ \forall \ |i - j| > 1$

vi. Matriks **A** adalah diagonal dominan (*diagonally dominant*) jika :

$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \ \forall \ 1 \leq i \leq n$

vii. Matriks **A** adalah simetri (*symmetric*) jika :

$a_{ij} = a_{ji} \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n$

viii. Matriks **A** adalah definit positif (*positive definite*) jika ia simetri, diagonal dominan, dan $a_{ii} > 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n$

ix. Berikut ini adalah contoh matriks-matriks di atas :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas — Matriks segitiga bawah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks tridiagonal — Matriks diagonal dominan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Matriks simetri — Matriks definit positif

II. SUBSTITUSI MUNDUR

2.1. Algoritma Sequensial

Contoh 9.1

Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 4x_4 &= 8 \\ -2x_2 - 1x_3 + 1x_4 &= 5 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Jawab :

Vektor **x** = $[x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]^T$ diperoleh melalui prosedur berikut :

1. hitung : $x_4 = 4/2 = 2$
2. substitusikan nilai x_4 ke semua persamaan di atasnya, koreksi ruas kanannya persamaan; hasilnya adalah :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 1x_3 &= 3 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3. ulangi langkah (1) dan (2) berturut-turut untuk x_3 dan x_2

4. ulangi langkah (1) untuk x_1

Dengan cara ini maka diperoleh :

x = $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$ = $[9\ \ -6\ \ 3\ \ 2]^T$

Sistem di atas dapat dituliskan sebagai **A x** = **b**, dimana :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ & -2 & -3 & 1 \\ & & 2 & -3 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = \text{matriks segitiga atas}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Untuk sistem segitiga atas berukuran *n* prosedur di atas dapat digeneralisasi menjadi algoritma sekuensial berikut :

Algoritma 9.1. BACK.SUBSTITUTION (SISD) :

```
    Global  n                {ukuran sistem}
            a[1.. n][ 1.. n] {elemen-elemen matriks A}
            b[1.. n]         {elemen-elemen vektor b}
            x[1.. n]         {elemen-elemen vektor x}
            i                {indeks kolom}
            j                {indeks baris}
1.  begin
2.    for i ← n downto 1 do
3.      x[i] ← b[i]/a[i][i]
4.      for j ← 1 to i –1 do
5.        b[j] ← b[j] – x[i] × a[j][i]
6.        a[j][i] ← 0 {statement ini bersifat opsional}
7.      endfor
8.    endfor
9.  end
```

Algoritma 9.1. melakukan operasi pembagian, perkalian, dan pengurangan. Banyaknya operasi pembagian adalah *n* (baris 3) sedangkan banyaknya operasi pengurangan dan perkalian (baris 5) adalah :

$$(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}\, n(n-1) \qquad (9.1)$$

sehingga kompleksitas algoritma 9.1. adalah $\Theta(n^2)$.

Instruksi pada baris 6 bersifat opsional, di antaranya untuk menayangkan matriks pada setiap iterasi.

2.2. Potensi Paralelisasi

Proses substitusi nilai x_4 ke tiga persamaan di atasnya pada penyelesaian contoh 9.1 di atas dapat dilakukan secara serempak.

2.3. Algoritma Paralel

Berdasarkan potensi paralelisasi maka algoritma paralel dapat disusun sebagai berikut :

Algoritma 9.2. BACK.SUBSTITUTION (UMA MULTIPROSESOR) :

Global	*n*	{ukuran sistem}
	p	{banyaknya proses}
	a[*1*.. *n*][*1*.. *n*]	{elemen-elemen matriks **A**}
	b[*1*.. *n*]	{elemen-elemen vektor **b**}
	x[*1*.. *n*]	{elemen-elemen vektor **x**}
	i	{indeks kolom}
Lokal	*j*	{indeks indetifier proses}
	k	{indeks baris}

```
begin
  for i ← n downto 1 do
    x[i]← b[i]/ a[i][i]
    forall P[j] where 1 ≤ j ≤ p do
      for k ← j to i –1 step p do
        b[k]← b[k] – x[i] × a[k][i]
        a[k][i] ← 0 {statement ini bersifat opsional}
      endfor
    endforall
  endfor
end
```

Algoritma 9.2. melakukan *n* operasi pembagian. Banyak-nya operasi pengurangan dan perkalian adalah :

$$\lceil (n-1)/p \rceil + \lceil (n-2)/p \rceil + \ldots + \lceil 2/p \rceil + \lceil 1/p \rceil = \tfrac{1}{2}\lceil n(n-1)/p \rceil \quad (9.2)$$

sehingga kompleksitas algoritma 9.2. adalah $\Theta(n^2 / p)$.

Berikut ini adalah *tracing* penerapan algoritma 9.2. terhadap sistem persamaan pada contoh 9.1. untuk $p = 2$:

$i = 4 : x[4] = b[4]/a[4][4] = 4/2 = 2$ $\quad \boxed{\therefore\ \mathbf{x[4] = 2}}$

$P[1] : k = 1 : b[1] = b[1] - x[4] \times a[1][4] = 8 - 2 \times 4 = 0$

$a[1][4] = 0$

$k = 3 : b[3] = b[3] - x[4] \times a[3][4] = 0 - 2 \times (-3) = 6$

$a[3][4] = 0$

P[2] : k = 2 : b[2] = b[2] - x[4] × a[2][4] = 5 - 2 × 1 = 3

a[2][4] = 0

i = 3 : x[3] = b[3]/a[3][3] = 6/2 = 3 $\boxed{\therefore\ x[3] = 3}$

P[1] : k = 1 : b[1] = b[1] - x[3] × a[1][3] = 0 - 3 × (-1) = 3

a[1][3] = 0

P[2] : k = 2 : b[2] = b[2] - x[3] × a[2][3] = 3 - 3 × (-3) = 12

a[2][3] = 0

i = 2 : x[2] = b[2]/a[2][2] = 12/(-2) = -6 $\boxed{\therefore\ x[2] = -6}$

P[1] : k = 1 : b[1] = b[1] - x[2] × a[1][2] = 3 - (-6) × 1 = 9

a[1][2] = 0

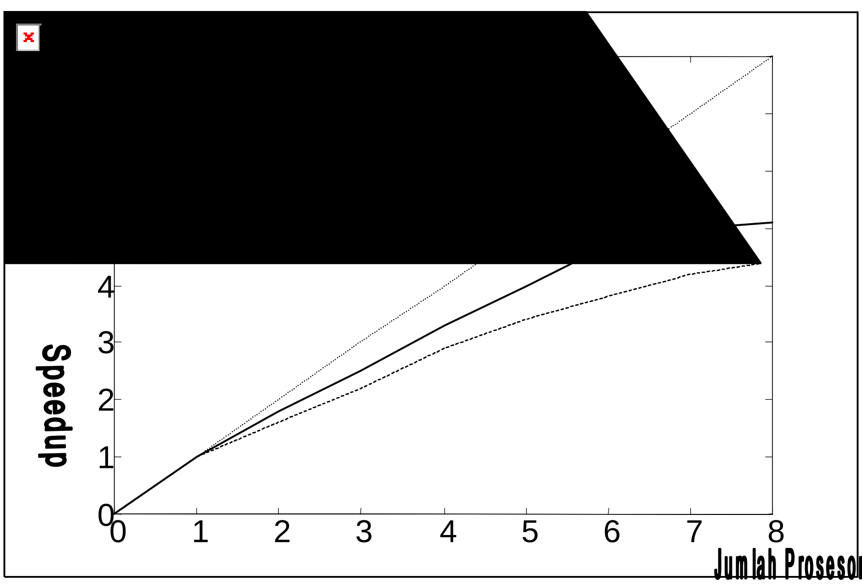
i = 1 : x[1] = b[1]/a[1][1] = 9/(1) = 9 $\boxed{\therefore\ x[1] = 9}$

2.4. Speedup

Speedup algoritma 9.2. ini adalah :

$$S = \frac{n + n(n-1)/2}{n + \lceil n(n-1)/2p \rceil}, \qquad \lim_{n \to \infty} S = p \qquad (9.3)$$

Menurut Amhdal, untuk jumlah prosesor tertentu nilai S akan meningkat menurut kenaikan ukuran matriks *n*. Gambar berikut adalah data akibat fenomena ini.



Gambar 9.1. Speedup paralelisasi algoritma substitusi mundur untuk berbagai ukuran matriks tridiagonal.